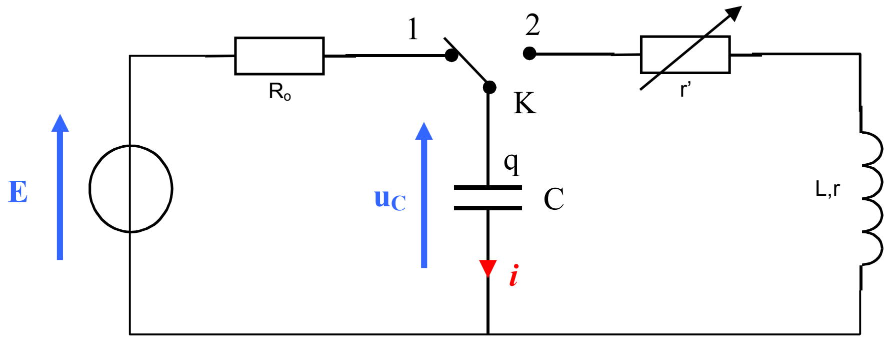
Oscillations libres dans un circuit RLC série

Les émetteurs employés pour les télécommunications utilisent des circuits appelés oscillateurs électriques couplés aux antennes. Ce sont les vibrations électriques, c'est-à-dire celles des électrons, qui génèrent l'émission d'ondes électromagnétiques…Comment ces oscillateurs fonctionnent-ils ?

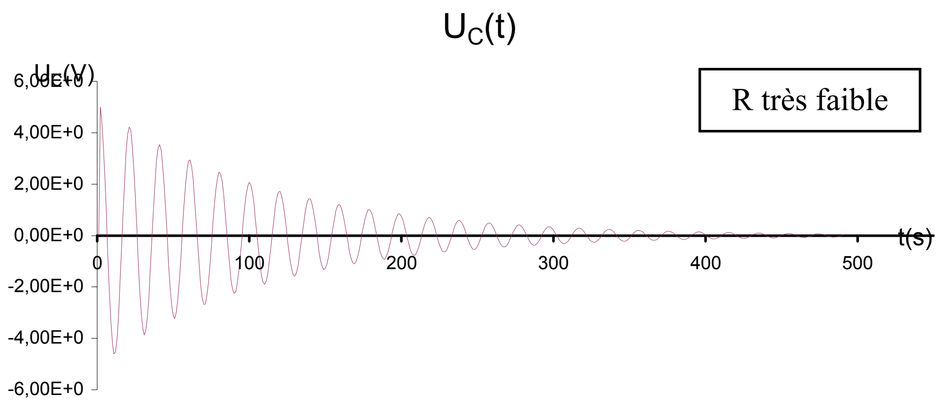
1 – Décharge d'un condensateur dans une bobine réelle

1.1 – Etude expérimentale

Considérons le circuit suivant.



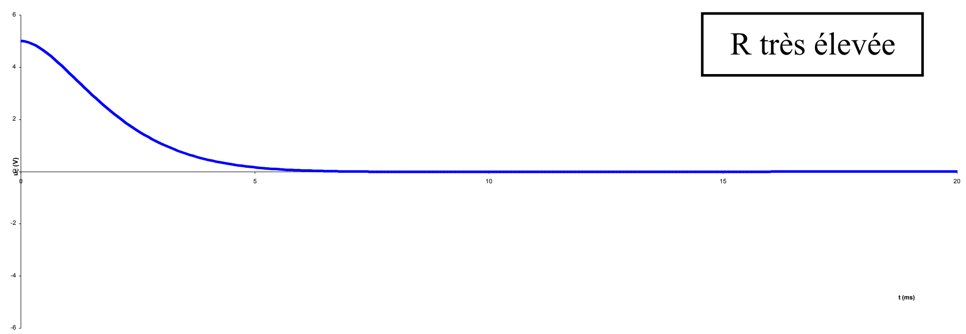
Le condensateur est initialement chargé.
Lorsque K est en position 2, et que $R = r + r'$ est faible, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur diminue puis augmente successivement (il en va de même pour la charge, qui lui est proportionnelle).
D'autre part, $u_C(t)$ repasse par une valeur nulle, en variant dans le même sens, à intervalle de temps réguliers.



Le condensateur se décharge et se recharge ainsi régulièrement : la décharge du condensateur dans une bobine est oscillante, elle évolue dans un sens puis dans l'autre.

1.2 – Régimes d'oscillations pseudopériodique et apériodique

L'amplitude des oscillations de la tension $u_C(t)$ diminue au cours du temps d'autant plus rapidement que la résistance $R = r + r'$ est grande. Pour des valeurs élevées de R, $u_C(t)$ peut même décroître continuellement sans osciller.



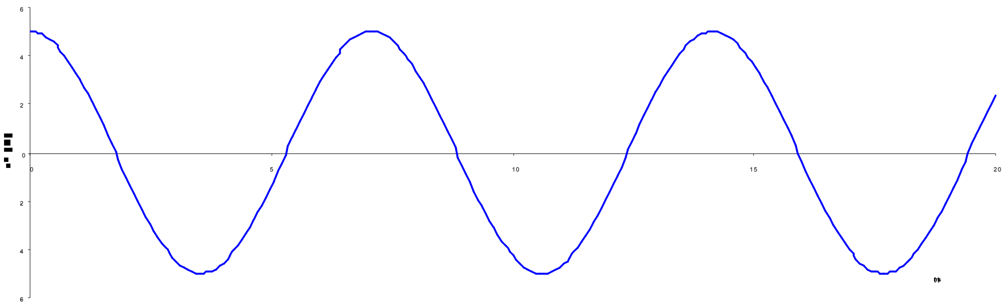
Si R est faible, l'amplitude des oscillations n'est pas constante mais décroît : **les oscillations s'amortissent**. Le régime est dit **pseudopériodique**. L'amortissement de ces oscillations est d'autant plus important que R est grande.
Si R est élevée, il n'y a plus d'oscillations. Le régime est dit **apériodique**.
La valeur de la résistance correspondant au passage du régime pseudopériodique au régime apériodique est appelée **résistance critique R_c** ; sa valeur dépend de L et de C.

→ Observer : Decharge_oscillante_dans_RLC.xls ou RLC.swf

La pseudopériode T désigne la durée constante séparant deux passages consécutifs par la valeur nulle de $u_C(t)$, celle-ci variant dans le même sens.

1.3 – Le régime périodique : un régime « limite »

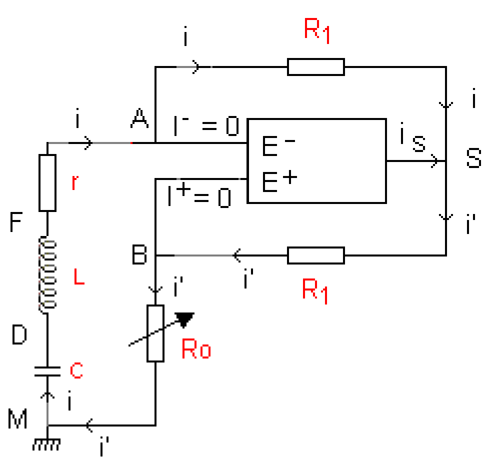
La résistance du conducteur ohmique ou celle, inévitable, de la bobine est la cause de l'amortissement des oscillations. Si on fait tendre la résistance du circuit (on verra comment procéder) vers une valeur nulle, l'amplitude des oscillations tend à devenir constante. A la limite, la résistance est nulle, les oscillations sont **rigoureusement périodiques**. Le circuit LC série est alors le siège d'oscillations **propres** non amorties. Le régime est alors périodique : les oscillations sont sinusoïdales et la période T_o des oscillations est appelée **période propre**.



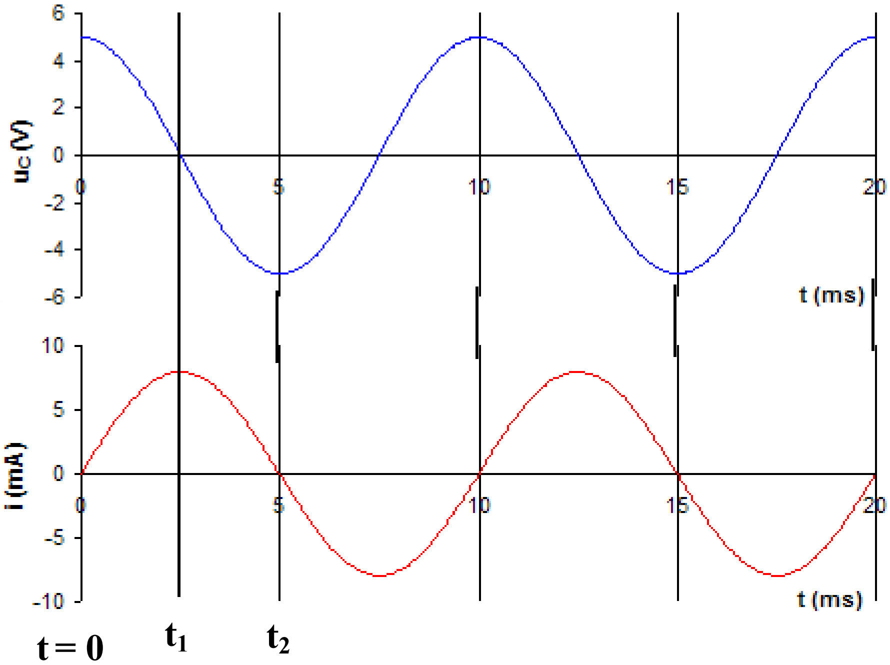
Dans le cas d'un régime pseudopériodique où la résistance R est très petite devant la résistance critique R_c, on identifie la pseudopériode T à la période propre T_o. Ce n'est pas totalement exact cependant, mais l'approximation est d'autant plus acceptable que R est faible.

1.4 – Interprétation énergétique

Constituons un circuit LC série sans résistance (montage à résistance négative).



Nous observons les évolutions suivantes.



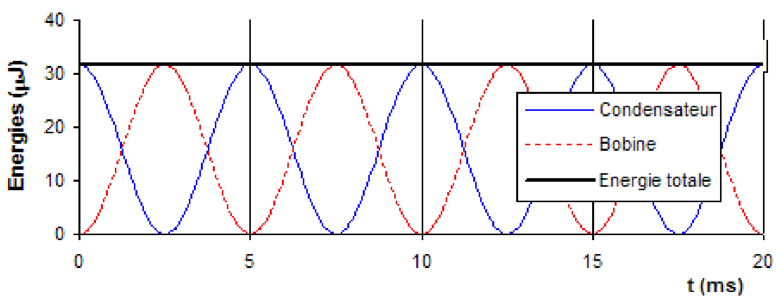
A l'instant de date t = 0, seul le condensateur a emmagasiné de l'énergie : $\mathcal{E}_{C_o} = \frac{1}{2} C u_C^2(t_o) \neq 0$.

L'énergie emmagasinée par la bobine est nulle : $\mathcal{E}_{L_o} = \frac{1}{2} L i^2(t_o) = 0$.

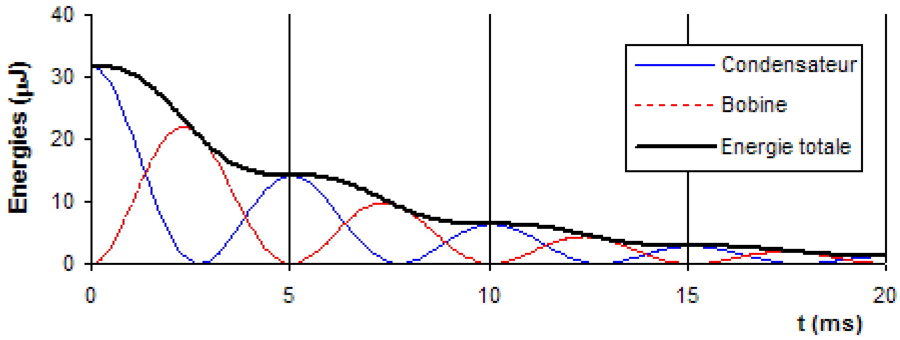
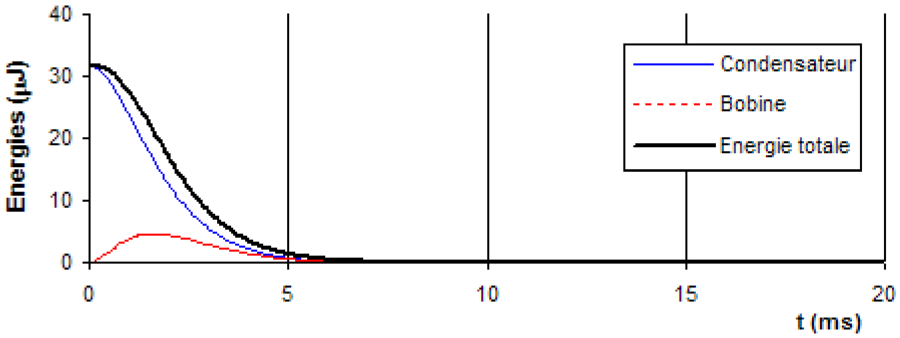
La décharge du condensateur se traduit par l'établissement du courant dans la bobine : $i(t) \neq 0$, elle emmagasine de l'énergie.

A la date t_1, la tension aux bornes du condensateur est nulle, toute l'énergie a été transmise à la bobine. $\mathcal{E}_L(t_1)$ est maximale et l'intensité du courant est, elle aussi, extrémale.
La bobine restitue ensuite son énergie, ce qui entraîne une charge du condensateur en sens inverse de sa charge initiale (q(t) < 0).

A la date t_2, l'intensité du courant s'annule. L'énergie totale $\mathcal{E}(t_2) = \mathcal{E}_C(t_2) + \mathcal{E}_L(t_2)$ du circuit n'est plus emmagasinée dans la bobine mais dans le condensateur.
Le condensateur se décharge à nouveau avec un courant qui change de sens (i(t) change de signe) et le phénomène se poursuit de sorte que l'énergie totale du circuit reste constante.



Considérons maintenant un circuit RLC série classique et ses régimes pseudopériodiques ou apériodiques. Nous obtenons les courbes suivantes.

	*Régime pseudopériodique*
L'énergie stockée dans le condensateur est bien maximale quand celle emmagasinée par la bobine est nulle. *Quand $\mathcal{E}_{élec}(t)$ diminue, $\mathcal{E}_{magn}(t)$ augmente et inversement ; l'énergie totale $\mathcal{E}(t)$ n'est en revanche plus constante mais diminue au cours du temps du fait d'une dissipation d'énergie par transfert thermique.*	
	*Régime apériodique*
Dans le cas d'un régime apériodique, il y a seulement un transfert d'énergie du condensateur vers la bobine : $\mathcal{E}_{élec}(t)$ décroît continuellement sans que $E_{magn}(t)$ s'annule, avec dissipation d'énergie par effet Joule ($\mathcal{E}(t)$ diminue).	

2 – Etude analytique dans le cas d'un amortissement négligeable

2.1 – Evolution de la tension aux bornes du condensateur

On considère le circuit LC série suivant, où le condensateur est initialement chargé.

D'après la loi d'additivité des tensions, à chaque instant,

$$u_L(t) + u_C(t) = 0$$

et compte tenu des orientations choisies,

$$L\frac{di}{dt} + u_C(t) = 0$$

Par définition de l'intensité,

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

il vient

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C(t) = 0$$

que nous écrirons sous la forme « canonique » d'une équation du second ordre

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0$$

Cette équation est équivalente à celle satisfaite par la charge du condensateur,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q(t) = 0$$

2.2 <u>– Résolution de l'équation différentielle</u>

Seules des fonctions de type « exponentielle » peuvent vérifier l'équation que nous avons établie.

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_o{}^2\, u_C(t) = 0$$

La dérivée seconde d'une exponentielle reste une exponentielle, donc reste positive !!

S'il s'agit d'une fonction exponentielle, elle sera toujours positive !

Le problème n'est pas soluble… avec l'espace réel !

La solution est d'envisager une combinaison d'exponentielles complexes qui, vous le verrez en mathématiques, vont faire apparaître par dérivation double un $i^2 = -1$ salutaire !

$$\underline{u_C}(t) = U_m\, e^{i(\omega_o t + \varphi)} = U_m\left[\cos\left(\omega_o t + \varphi\right) + i\sin\left(\omega_o t + \varphi\right)\right]$$

On vérifie effectivement que

$$\frac{d^2\underline{u_C}}{dt^2} = U_m\left(i\omega_o\right)^2 e^{i(\omega_o t+\varphi)} = -\omega_o{}^2\, U_m\, e^{i(\omega_o t+\varphi)} = -\omega_o{}^2\, \underline{u_C}(t)$$

Dans notre problème physique, nous nous contenterons de la partie réelle de la solution, qui peut se mettre sous la forme

$$u_C(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{u_C}(t)\right) = U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$$

La linéarité des équations différentielles rencontrées implique qu'une combinaison linéaire de solutions de l'équation est également solution : la partie réelle s'obtient par les formules d'Euler comme la somme de deux solutions de l'équation, elle est donc elle aussi solution de l'équation différentielle.

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_o}U_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) \quad \text{donc} \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$$

Ainsi, $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_o{}^2\, u_C(t) = -\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2}_{\omega_o{}^2} U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) + \omega_o{}^2 \times U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) = 0$.

Les fonctions sinusoïdales, du type

$$u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$$

Sont donc solutions de l'équation obtenue pour le dipôle RLC série. T_o y désigne la **période propre des oscillations** : nous vérifions bien que

$$u_C(t + T_o) = u_C(t)$$

pour tout t.

La grandeur U_m est **l'amplitude des oscillations**, exprimée en volts. Le terme en cosinus variant entre –1 et +1, $u_C(t)$ varie entre $-U_m$ et U_m (U_m devant être non nulle, évidemment).

φ est appelée **phase à l'origine des dates**, et s'exprime en radians. Généralement, on choisit $-\pi < \varphi \leq \pi$. La présence de ce terme dans l'expression entraîne qu'à $t_o = 0$ s, $u_C(t_o) = U_m \cos \varphi$ n'est pas forcément maximale.

<u>NB</u> : l'argument du cosinus, $\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi$, est appelé phase ; la phase à l'origine est tout simplement la valeur de cette sous-fonction en t = 0…

2.3 – <u>Constantes dépendant du circuit</u>

La période propre T_o dépend des caractéristiques L et C du circuit, caractéristiques qui apparaissent dans l'équation différentielle.

Cherchons à l'exprimer en reprenant la forme de la solution proposée.

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_o}U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right)$$

L'équation vérifiée s'écrit

$$-\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right) + \frac{1}{LC}U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right) = 0$$

Ainsi, à chaque instant,

$$-U_m\left(\frac{4\pi^2}{T_o^2} + \frac{1}{LC}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right) = 0$$

U_m étant une constante non nulle, pour que cette relation soit vérifiée à tout instant t, il faut imposer que

$$-\frac{4\pi^2}{T_o^2} + \frac{1}{LC} = 0$$

Comme $T_o > 0$, nous pourrons écrire

$$T_o = 2\pi\sqrt{LC}$$

Résumons.

La solution $u_C(t)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}\frac{du_C}{dt} = 0$$

est une fonction sinusoïdale de la forme

$$u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$$

où

- U_m, exprimée en volts, est l'amplitude des oscillations

- φ, en radians, est la phase à l'origine des dates, telle que $-\pi < \varphi < \pi$
- T_o est la période propre des oscillations telle que

$$T_o = 2\pi\sqrt{LC}$$

avec T_o en secondes si L est en henry (H) et C en farad (F).

Exercice : analyse dimensionnelle de la définition de la période propre.

2.4 – Constantes dépendant des conditions initiales

Les valeurs des constantes U_m et φ dépendent des conditions initiales sur $u_C(t)$ et $i(t)$.
Prenons un exemple simple, où le condensateur a été chargé par une tension de valeur E = 6 V.
Initialement, dans le circuit LC, l'intensité est nulle.
En prenant

$$u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$$

Nous avons à l'origine (t = 0 s)

$$u_C(0) = U_m \cos\varphi = E$$

et comme

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_o}U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$$

de la même façon,

$$i(0) = -\frac{2\pi}{T_o}U_m \sin\varphi = 0$$

Ainsi,

$$\sin\varphi = 0$$

indique que $\varphi = 0$ ou que $\varphi = \pi$. Comme $u_C(0) = U_m \cos\varphi$ et $u_C(t_o) = E$, nous obtenons

$$U_m = E \quad \text{ou} \quad -U_m = E$$

Or, Um et E étant des grandeurs positives, la solution qui convient est $U_m = E$, d'où

$$u_C(t) = E\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t\right)$$

2.5 – Expression de l'intensité du courant

La relation

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

permet d'obtenir

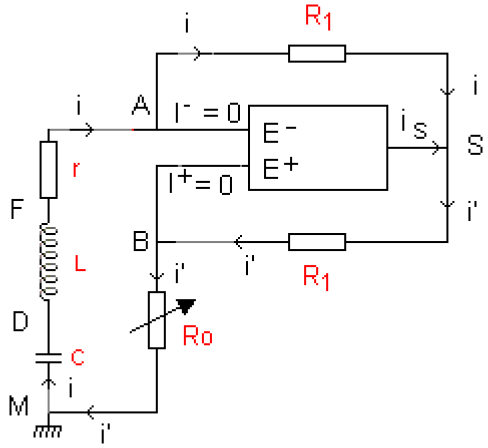
$$i(t) = \frac{d}{dt}\left(U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)\right) = -\frac{2\pi}{T_o}CU_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) = -\mathrm{I_m}\sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$$

avec $\mathrm{I_m} = \frac{2\pi}{T_o}CU_m$.

3 – Entretien des oscillations

Dans le cas d'un circuit RLC série, l'amplitude des oscillations décroît du fait d'un transfert d'énergie par effet Joule.
Toutefois, il est possible d'entretenir les oscillations et d'obtenir, pour les grandeurs oscillantes, une amplitude constante en utilisant un dispositif qui fournit continuellement l'énergie dissipée par transfert thermique. L'énergie totale du circuit reste alors constante.

Le montage suivant permet d'entretenir des oscillations quasi sinusoïdales dans le circuit r, L, C malgré la présence de la résistance r. Nous allons montrer que la partie ABM du circuit permet de compenser r si on choisit $R_o = r$.



Ce dispositif d'entretien est construit pour maintenir une tension $u_S(t) = R_o\, i(t)$ aux bornes du dipôle RLC. Chaque seconde, il fournit au dipôle une énergie égale à $u_S(t) \times i(t) = R_o\, i^2(t)$, qui compense l'effet Joule dû à la résistance R si $R_o = R$.

Partie hors programme de Term S

Pour un amplificateur opérationnel supposé idéal $I^- = 0$ A et $I^+ = 0$ A.
De plus, en régime linéaire (non saturé), on a $U_{E+\,E-} = 0$ V.

Nous supposerons ces conditions réalisées ci-dessous. L'alimentation de l'amplificateur opérationnel n'est pas représentée sur le schéma.

$u_{AS} = R_1\, i$	$u_{SB} = R_1\, i'$	$u_{BA} = U_{E+\,E-} = 0$	$u_{AB} = -\, u_{BA} = 0$
$u_{MD} = \dfrac{q_M}{C}$	$u_{DF} = L\dfrac{di_{DF}}{dt} = L\dfrac{di}{dt}$	$u_{FA} = r\, i$	$u_{BM} = R_o\, i'$

La loi des tensions appliquée à la maille ASBA s'écrit :

$$u_{AS} + u_{SB} + u_{BA} = 0$$

$$R_1\, i + R_1\, i' + 0 = 0$$

On en déduit : i' = - i.

La loi des tensions appliquée à la maille MDFABM s'écrit :

$$u_{MD} + u_{DF} + u_{FA} + u_{AB} + u_{BM} = 0$$

$$\frac{q_M}{C} + L\frac{di_{DF}}{dt} + r\,i + 0 + R_o\,i' = 0$$

$$\frac{q_M}{C} + L\frac{di_{DF}}{dt} + r\,i - R_o\,i = 0$$

Dérivons cette équation par rapport au temps t :

$$\frac{1}{C}\frac{dq_M}{dt} + L\frac{di^2}{dt^2} + \left(r - R_o\right)\frac{di}{dt} = 0$$

Tenons compte du fait que $\frac{dq_M}{dt} = i_{MD} = i$

$$\frac{1}{C}i + L\frac{di^2}{dt^2} + \left(r - R_o\right)\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di^2}{dt^2} + \frac{r - R_o}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

$$\boxed{\frac{di^2}{dt^2} + \frac{r - R_o}{L}\frac{di}{dt} + \omega_o^{\ 2}\,i = 0 \quad \text{en posant encore} \quad \omega_o^{\ 2} = \frac{1}{LC}}$$

Si la résistance réglable R_o est choisie égale à la résistance r du circuit rLC, l'équation devient :

$$\boxed{\frac{di^2}{dt^2} + \omega_o^{\ 2}\,i = 0}$$

On retrouve une équation différentielle semblable à l'équation du circuit LC.

La solution cette équation est une fonction sinusoïdale :

$$i(t) = i_{\max}\cos\left(\omega_o t + \varphi\right)$$

avec la période propre $T_o = 2\pi\sqrt{LC} = \frac{2\pi}{\omega_o}$.

Des oscillations sinusoïdales sont entretenues dans le circuit malgré la présence de r.

La portion de circuit ABM se comporte comme une "résistance négative". En effet :

$$u_{AB} + u_{BM} = 0 + R_o\,i'$$

et comme $i' = - i$,

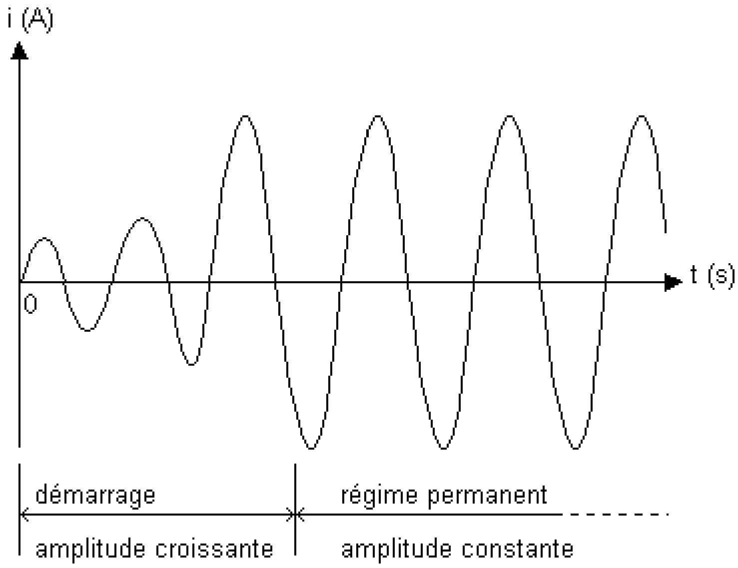
$$u_{AB} + u_{BM} = u_{AM} = - R_o\, i$$

Remarque : La puissance électrique $r\, i^2$ reçue par r (et perdue sous forme calorifique) est fournie par la résistance négative $- R_o\, i^2$ (en fait par l'alimentation de l'amplificateur opérationnel, non représentée sur le schéma ci-dessus).

Grâce à cet apport d'énergie de l'alimentation vers l'oscillateur, l'énergie totale stockée dans L et C reste constante malgré la présence de la résistance. Il continue à y avoir échange continuel d'énergie entre le condensateur et l'inductance au cours des oscillations.

Compléments : (coefficient A non constant - Régime non linéaire)

Une étude plus précise de l'expérience précédente peut-être faite (hors programme en T S) :



Amorçage des oscillations : On donne à R_o une valeur un peu supérieure à r.

Remarque préliminaire : Les oscillations prennent naissance grâce à de très petits mouvements aléatoires des électrons libres dans le métal constituant la résistance. Ces très petites oscillations d'électrons (dues à l'agitation thermique) existent dans tout conducteur, même non relié à un générateur.

Pour t = 0 s l'intensité du courant est voisine de 0 A.

L'amplificateur opérationnel n'est pas saturé : $u_{AM} = - R_o\, i$. L'étude faite ci-dessus conduit à :

$$\frac{di^2}{dt^2} + \frac{r - R_o}{L}\frac{di}{dt} + \omega_o^{\,2}\, i = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_o^{\,2} = \frac{1}{LC}$$

En posant $A = \dfrac{r - R_o}{L}$, nous écrirons $\dfrac{di^2}{dt^2} + A\dfrac{di}{dt} + \omega_o^{\,2}\, i = 0$.

avec A < 0 : l'amplitude de i croît.

L'amplitude des oscillations ne peut pas croître indéfiniment. Le moment vient où la valeur instantanée de l'intensité du courant est telle que l'A.O. est saturé.

Saturation de l'ampli-op : Lorsque l'ampli-op est saturé, on a $u_{AM} = u_{AS} + u_{SM} = R_1\, i \pm V_{Sat}$

On montre alors que :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{r+R_1}{L}\frac{di}{dt} + \omega_o{}^2\, i = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_o{}^2 = \frac{1}{LC}$$

soit encore, en posant $A = \dfrac{r+R_1}{L}$,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + A\frac{di}{dt} + \omega_o{}^2\, i = 0$$

Ici, A > 0 : l'amplitude de i décroît jusqu'à ce que l'ampli-op repasse en régime non saturé mais avec de "nouvelles conditions initiales". Ainsi de suite …

On montre dans l'enseignement post baccalauréat que ce type de basculements successifs entre A < 0 et A > 0 conduit à un système stable d'oscillations. Cet oscillateur non linéaire se rapprochera d'un oscillateur donnant un régime permanent quasi sinusoïdal si R_o est très voisin de r.

Remarque : L'équation de Van der Pol

$$\ddot{x} - \varepsilon\, \omega_o \left(1 - \frac{x^2}{x_o{}^2}\right)\dot{x} + \omega_o{}^2\, x = 0$$

a été introduite pour étudier les oscillateurs non linéaires. Lorsque x est petit, le coefficient A est négatif. Lorsque x dépasse la valeur x_o, A devient positif. L'étude peut être faite sur ordinateur mais elle n'est pas explicitement au programme de la classe de terminale S. → voir vanderpol.swf